1. f_n est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $f_n(]1,+\infty[)$ et comme $0 \in f_n(]1,+\infty[)$ alors il existe un unique $\alpha_n \in]1,+\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n)=0$.

2.a) $f_{n+1}(x)=\ln(x-1)+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}...+\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{n+1}$ d'où $f_{n+1}(\alpha_n)=\underbrace{\ln(\alpha_n-1)+\alpha_n+\frac{\alpha_n^{\,2}}{2}+\frac{\alpha_n^{\,3}}{3}...+\frac{\alpha_n^{\,n}}{n}}_{f_n(\alpha_n)}+\frac{\alpha_n^{\,n+1}}{n+1}$ alors :

$f_{n+1}(\alpha_n)=f_n(\alpha_n)+\frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n+1}=0+\frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n+1}=\frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n+1}$.

b) On a $f_{n+1}(\alpha_{n+1})=0$ *et* $f_{n+1}(\alpha_n)=\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}>0 \Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1})\le f_{n+1}(\alpha_n)$, comme f_{n+1} est une fonction croissante sur $]1,+\infty[$ alors $\alpha_{n+1}\le\alpha_n$ donc (α_n) est suite décroissante et elle est minorée par 1 alors (α_n) est une suite convergente.

Exercice N°11: 1.a) φ est dérivable sur $]0,+\infty[$. (somme des fonctions dérivables) on a :

$\forall x\ge 0;\varphi'(x)=2\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{2x+1}{(x+1)^2}>0$ d'où φ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

b) Comme φ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ alors $\forall x>0;\varphi(x)>\varphi(0)=0$

2.a) La fonction $x\mapsto 1+\frac{1}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0;1+\frac{1}{x}>0\Rightarrow$ la fonction $x\mapsto\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus la fonction : $x\mapsto x^2$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc la fonction $f: x\mapsto x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{0^+} f=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x^2\ln(x+1)-x.x\ln x\right]=0=f(0)\Rightarrow$ f est continue en 0.**Conclusion** : f est continue sur $[0,+\infty[$.

b) La fonction $x\mapsto 1+\frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0;1+\frac{1}{x}>0\Rightarrow$ la fonction $x\mapsto\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ De plus la fonction : $x\mapsto x^2$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc la fonction $f: x\mapsto x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\ln(x+1)-x\ln x\right]=0\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 0.**Conclusion** : f est dérivable sur $[0,+\infty[$.

c) On a : $\forall x\in]0,+\infty[, f'(x)=2x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x^2.\left(\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}}\right)=x.\left[2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{x\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+1}\right)\right]=x.\left[2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}\right)\right]=x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $\forall x>0$ *on a* $\frac{1}{x}>0$ *alors* $\forall x>0$ *on a* $\varphi(x)>0$ *et par suite* $\forall x>0$ *on a* $f'(x)=x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)>0$

x	0		$+\infty$
f'(x)	0	+	
f(x)	0	↗	$+\infty$

• $\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\overset{\text{pose } X=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{X}.\frac{\ln(1+X)}{X}\right]=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$ Comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+)=\mathbb{R}_+$.

1.a) Soit $t\in\mathbb{R}_+, \forall x\in[0,t], on\ a: \frac{1}{1+x}\le 1\Rightarrow\int_0^t\frac{1}{1+x}dx\le\int_0^t dx\Leftrightarrow\ln(1+t)\le t$

Qarray.tn Aqra Blech Qarray.tn Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Devoir.tn Toutes les matières, tous les niveaux...